Leichte Analysis, die Riccati-Gleichung durch einen Kettenbruch aufzulösen *

Leonhard Euler

§1 Schon vor langer Zeit habe ich freilich die Auflösung der Riccati-Gleichung durch einen Kettenbruch angegeben, aber dabei eine nicht gerade unaufwändige Methode gebraucht, die ziemlich abstruse Transformationen verlangte. Nun hat sich mir ein anderer weit leichterer Weg offenbart, dasselbe zu leisten, weil welcher zu einem um Vieles leichteren Kettenbruch führt, ist es mir nicht unwürdig erschienen, dass ich ihn veröffentliche, besonders weil geistreiche Geometer begonnen haben, diesen Gegenstand mit größtem Eifer zu erforschen.

§2 Ich betrachte aber die Riccati-Gleichung in dieser Form ausgedrückt:

$$ady + yydx = x^{n-2}dx,$$

welche ich aber auf diese Weise darstelle:

---

*Originaltitel: "Analysis facilis aequationem Riccatianam per fractionem continuam resolvendi", erstmals publiziert in „*Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg 6* 1818, pp. 12-29", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 23, pp. 414 - 430 ", Eneström-Nummer E751, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

$$ady - \frac{bydx}{x} + yydx = x^{n-2}dx,$$

welche in Wirklichkeit nicht allgemeiner ist als die erste; denn nach Setzen von $y = x^{\frac{b}{a}}v$ wird

$$dy = x^{\frac{b}{a}}dv + \frac{b}{a}x^{\frac{b-a}{a}}vdx,$$

auf diese Weise wird der neu eingeführte Term wiederum beseitigt werden, und es wird die folgende Gleichung entspringen:

$$ax^{\frac{b}{a}}dv + x^{\frac{2b}{a}}vvdx = x^{n-2}dx.$$

Aber die angenommene Form ist besonders für unser Unterfangen geeignet; ich setze aber zusätzlich $y = \frac{z}{x}$, und lege der Kürze wegen $a + b = c$ fest, dass die folgende Gleichung hervorgeht:

$$axdz - czdx + zzdx = x^n dx.$$

§3 Es geschehe nun diese Substitution:

$$z = c + \frac{x^n}{p},$$

so dass gilt

$$dz = \frac{npx^{n-1}dx - x^n dp}{pp},$$

und nach der Substitution und nach Beseitigen der Brüche wird zu dieser Gleichung gelangt werden:

$$axdp - (c + na)pdx + ppdx = x^n dx,$$

welche der ersten nahezu vollkommen gleich ist; sie unterscheidet sich nämlich nur darin, dass wir im zweiten Term anstelle von c hier $c + na$ haben.

§4 In dieser Gleichung wollen wir nun weiter setzen

$$p = c + na + \frac{x^n}{q},$$

und nach Durchführen der Rechnung werden wir zur folgenden Gleichung gelangen:

$$axdq - (c + 2na)qdx + qqdx = x^n dx,$$

welche wir freilich unmittelbar aus der vorhergehenden hätten ableiten können, indem wir natürlich q anstelle von p schreiben und den Koeffizienten des zweiten Termes, der $c + na$ war, erneut um die Größe na vermehren.

§5 Auf die gleiche Weise wird eingesehen, wenn wir hier weiter setzen

$$q = c + 2na + \frac{x^n}{r},$$

dass diese Gleichung hervorgehen wird:

$$axdr - (c + 3na)rdx + rrdx = x^n dx,$$

und weiter, wenn ich hier festlege

$$r = c + 3na + \frac{x^n}{s},$$

wird diese Gleichung hervorgehen:

$$axds - (c + 4na)sdx + ssdx = x^n dx.$$

Und so lässt sich weiter bis ins Unendliche fortschreiten.

§6 Wenn wir daher nun anstelle der Buchstaben p, q, r, s etc. nacheinander die jeweiligen Werte einsetzen, werden wir für die Variable z den folgenden ziemlich gefälligen Kettenbruch auffinden:

$$z = c + \cfrac{x^n}{c + na + \cfrac{x^n}{c + 2na + \cfrac{x^n}{c + 3na + \cfrac{x^n}{c + 4na + \cfrac{x^n}{c + 5na + \text{etc.}}}}}}$$

woher der Wert y der vorhergehenden Gleichung, die, wegen $b = c - a$, diese war

$$ady + (a - c)\frac{ydx}{x} + yydx = x^{n-2}dx,$$

mit diesem Kettenbruch ausgedrückt werden wird:

$$y = \frac{c}{x} + \cfrac{x^{n-1}}{c + na + \cfrac{x^n}{c + 2na + \cfrac{x^n}{c + 3na + \text{etc.}}}}$$

§7 Daher wird also für die zuerst vorgelegte Gleichung:

$$ady + yydx = x^{n-2}dx,$$

wo natürlich $c = a$ ist, sein

$$y = \frac{a}{x} + \cfrac{x^{n-1}}{a(1+n) + \cfrac{x^n}{a(1+2n) + \cfrac{x^n}{a(1+3n) + \text{etc.}}}}$$

§8 Wenn daher also umgekehrt dieser Kettenbruch vorgelegt wird:

$$z = c + \cfrac{x^n}{c + na + \cfrac{x^n}{c + 2na + \cfrac{x^n}{c + 3na + \text{etc.}}}}$$

sind wir nun sicher, dass der Wert von z durch diese Differentialgleichung bestimmt:

$$axdz - czdx + zzdx = x^n dx,$$

deren Integral also, in entsprechender Weise genommen und an diesen Fall angepasst, den Wert jenes Kettenbruches liefern wird; natürlich muss das Integral so bestimmt werden, dass nach Setzen von $x = 0$ $z = c$ wird, wenn freilich n eine positive Zahl war; aber wenn es negativ war, muss $z = c$ hervorgehen, nachdem $x = \infty$ gesetzt worden ist.

§9 Daher können viele außerordentliche Schlussfolgerungen für die Fälle abgeleitet werden, in denen die vorgelegte Differentialgleichung eine Integration zulässt. So wird für die zuerst angenommene Gleichung, wo $c = a$ ist, wenn wir $n = 2$ setzen, $ady + yydx = dx$ sein, woher $dx = \frac{ady}{1-yy}$ erschlossen wird, deren Integral dieses ist

$$x + \alpha = \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y},$$

und durch Übergehen zu Zahlen $\Delta e^{\frac{2x}{a}} = \frac{1+y}{1-y}$, woher umgekehrt sein wird

$$y = \frac{\Delta e^{\frac{2x}{a}} - 1}{\Delta e^{\frac{2x}{a}} + 1}, \quad \text{und daher} \quad z = xy = x\frac{(\Delta e^{\frac{2x}{a}} - 1)}{\Delta e^{\frac{2x}{a}} + 1},$$

welcher Wert die Summe dieses Kettenbruches erfassen wird:

$$z = a + \cfrac{xx}{3a + \cfrac{xx}{5a + \cfrac{xx}{7a + \cfrac{xx}{9a + \text{etc.}}}}}$$

weil welcher $z = a$ liefert, nachdem $x = 0$ genommen worden ist, kann daher der Wert der Konstante Δ in herkömmlicher Weise bestimmt werden.

§10 Weil wir also, wegen $z = xy$, gefunden haben

$$z = \frac{(\Delta e^{\frac{2x}{a}} - 1)x}{\Delta e^{\frac{2x}{a}} + 1},$$

muss die Konstante Δ so bestimmt werden, dass, nachdem $x = 0$ gesetzt worden ist, $z = a$ wird. In diesem Fall verschwindet aber die ganze Formel, wenn nicht auch ihr Nenner zugleich verschwindet, was nur geschehen kann, wenn $\Delta = -1$ genommen wird. Weil also gilt

$$z = -x\frac{(1 + e^{\frac{2x}{a}})}{1 - e^{\frac{2x}{a}}} = x\frac{(1 + e^{\frac{2x}{a}})}{e^{\frac{2x}{a}} - 1},$$

wird für ein quasi unendlich klein angenommenes x dann $e^{\frac{2x}{a}} = 1 + \frac{2x}{a}$ werden, weswegen wir in diesem Fall haben werden

$$z = x\frac{(2 + \frac{2x}{a})}{\frac{2x}{a}} = a + x,$$

und daher wird, nachdem $x = 0$ gesetzt worden ist, $z = a$ werden, vollkommen wie es verlangt wird. Deshalb wird der Wert unseres hier vorgelegten Kettenbruches sein

$$z = x\frac{(1 + e^{\frac{2x}{a}})}{e^{\frac{2x}{a}} - 1},$$

welcher auch auf diese Weise dargestellt werden kann

$$z = x\frac{(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}})}{e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{-x}{a}}},$$

der Zähler welches Bruches, nach Entwicklung in eine Reihe, wird

$$2\left(1+\frac{1}{2}\frac{xx}{aa}+\frac{1}{24}\frac{x^4}{a^4}+\frac{1}{720}\frac{x^6}{a^6}+\text{etc.}\right).$$

Der Nenner wird hingegen diese sein

$$\frac{2x}{a}\left(1+\frac{1}{6}\frac{xx}{aa}+\frac{1}{120}\frac{x^4}{a^4}+\frac{1}{5040}\frac{x^6}{a^6}+\text{etc.}\right),$$

woher wir erlangen

$$z=\frac{1+\frac{1}{2}\frac{xx}{aa}+\frac{1}{24}\frac{x^4}{a^4}+\frac{1}{720}\frac{x^6}{a^6}+\text{etc.}}{\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{6}\frac{xx}{aa}+\frac{1}{120}\frac{x^4}{a^4}+\frac{1}{5040}\frac{x^6}{a^6}+\text{etc.}\right)}$$

§11 Wenn wir daher also $a = 1$ nehmen, dass wir diesen Kettenbruch haben:

$$z=\frac{x(e^x+e^{-x})}{e^x-e^{-x}}=1++\cfrac{xx}{3+\cfrac{xx}{5+\cfrac{xx}{7+\text{etc.}}}},$$

wird derselbe Kettenbruch auch so ausgedrückt werden:

$$\frac{1+\frac{1}{2}\frac{xx}{aa}+\frac{1}{24}\frac{x^4}{a^4}+\frac{1}{720}\frac{x^6}{a^6}+\text{etc.}}{1+\frac{1}{6}\frac{xx}{aa}+\frac{1}{120}\frac{x^4}{a^4}+\frac{1}{5040}\frac{x^6}{a^6}+\text{etc.}},$$

welche beiden Reihen umso mehr konvergieren, ein umso kleinerer Wert x zugeteilt wird. Natürlich, wenn $x = 1$ gesetzt wird, wird der Wert dieses Kettenbruches:

$$1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{9+\text{etc.}}}}}$$

sein

$$\frac{e^1+e^{-1}}{e^1-e^{-1}}=\frac{ee+1}{ee-1}.$$

§12 Aber auch dieser Kettenbruch selbst konvergiert sehr stark. Wenn wir nämlich die Indizes 1, 3, 5, 7 etc. der Reihe nach anordnen und auf gewohnte Weise die Brüche darunter schreiben, werden sie ununterbrochen näher zum wahren Wert dieser Form voranschreiten; die Gestalt dieser Operation wird aber diese sein:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11 & \text{etc.} \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{4}{3}, & \frac{21}{16}, & \frac{151}{115}, & \frac{1380}{1051} & \text{etc.} \end{array}$$

damit aber klar zu tage tritt, wie schnell diese Gleichheiten zur Wahrheit konvergieren, werden die Differenzen zwischen den benachbarten Termen betrachtet, die abwechselnd positiv und negativ sein werden und der Reihe nach so fortschreiten:

$$\infty, \quad -\frac{1}{3}, \quad +\frac{1}{3\cdot 16}, \quad \frac{-1}{16\cdot 115}, \quad +\frac{1}{115\cdot 1051}, \quad \frac{-1}{1051\cdot 11676}.$$

Nun wissen wir also sicher, dass der Fehler unseres letzten Bruches $\frac{1380}{1051}$ gewiss kleiner als $\frac{1}{1051\cdot 11676}=\frac{1}{12271476}$ ist. Weniger als das weicht er also vom wahren Wert $\frac{ee+1}{ee-1}$ ab.

§13 Hier tut sich aber die Frage von größter Bedeutung auf, wie groß der Wert des für z gefundenen Kettenbruches ist:

$$z = a + \cfrac{xx}{3a + \cfrac{xx}{5a + \text{etc.}}}$$

wenn wir $-tt$ anstelle von xx schreiben, dass $x = t\sqrt{-1}$ ist. Dann werden wir aber haben

$$z = t\sqrt{-1}\frac{e^{\frac{t\sqrt{-1}}{a}} + e^{\frac{-t\sqrt{-1}}{a}}}{e^{\frac{t\sqrt{-1}}{a}} - e^{\frac{-t\sqrt{-1}}{a}}},$$

woraus also die imaginären Größen herausgeworfen werden müssen. Weil aber gilt:

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} \quad = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$$

und

$$e^{-\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi,$$

wird der gesuchte Wert sein

$$z = \frac{t}{\tan\frac{t}{a}} = t\cot\frac{t}{a},$$

welches also der Wert dieses Kettenbruches ist:

$$z = a - \cfrac{tt}{3a - \cfrac{tt}{5a - \cfrac{tt}{7a - \text{etc.}}}}$$

Aber aus jener Gleichung, nachdem $t = 0$ gesetzt worden ist, wird offenbar $z = a$.

§14 In diesem Fall, in dem es möglich gewesen ist, die Werte dieser Kettenbrüche tatsächlich entweder durch Exponentialformeln oder durch Kreisbogen zu bestimmen, hat die erste vorgelegte Gleichung einen Integration zugelassen. Weil ja aber unendlich viele andere integrierbare Fälle gegebenen sind, wollen wir noch den Fall $n = -2$ untersuchen und die erste Gleichung wird diese sein

$$ady + yydx = \frac{dx}{x^4},$$

wo natürlich $c = a$ ist, wollen wir, um sie zu integrieren, setzen

$$y = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{xx},$$

nach welcher Substitution diese Gleichung hervorgehen wird:

$$\left.\begin{array}{lll} -\dfrac{\alpha a}{xx} & -\dfrac{2\beta a}{x^3} & +\dfrac{\beta\beta}{x^4} \\ +\dfrac{\alpha\alpha}{xx} & +\dfrac{2\alpha\beta}{x^3} & \end{array}\right\} = \frac{1}{x^4},$$

wo also verlangt wird, dass $\alpha = a$ und $\beta\beta = 1$ und daher entweder $\beta = +1$ oder $\beta = -1$ ist. Und so haben wir zwei Werte für y, von welchen

der eine dieser ist $\quad y = \dfrac{a}{x} + \dfrac{1}{xx}, \quad$ der andere hingegen dieser $\quad y = \dfrac{a}{x} - \dfrac{1}{xx}.$

§15 Aber diese Integrale sind nur partikuläre Integrale; für unser Ziel müssen wir aber das vollständige Integral kennen, damit natürlich die beliebige Konstante an die Umstände der Frage angepasst werden kann. Weil wir aber zwei partikuläre Werte haben, wollen wir sie wie folgt festlegen

$$\frac{a}{x}+\frac{1}{xx}=p \quad \text{und} \quad \frac{a}{x}-\frac{1}{xx}=q,$$

so dass in Wirklichkeit gilt

$$adp+ppdx=\frac{dx}{x^4} \quad \text{und} \quad adq+qqdx=\frac{dx}{x^4},$$

und von jeder dieser beiden werde die zu integrierende Gleichung selbst subtrahiert, und es werden diese zwei Gleichheiten entspringen:

$$a(dy-dp)+dx(yy-pp)=0$$

und

$$a(dy-dq)+dx(yy-qq)=0,$$

von welchen jene durch $y-p$, diese hingegen durch $y-q$ dividiert diese Gleichungen liefert:

$$a\frac{(dy-dp)}{y-p}+dx(y+p)=0$$

und

$$a\frac{(dy-dq)}{y-q}+dx(y+q)=0,$$

von welchen diese von jener subtrahiert zurücklässt

$$a\frac{(dy-dp)}{y-p}-a\frac{(dy-dq)}{y-q}+dx(p-q)=0,$$

deren Integral also dieses ist

$$a\log(y-p)-a\log(y-q)+\int dx(p-q)=\text{Konst.}$$

Weil also $p-q=\frac{2}{xx}$ ist, wird sein

$$\int dx(p-q)=-\frac{2}{x},$$

und so werden wir haben

$$a\log\frac{y-p}{y-q}=C+\frac{2}{x},$$

woher weiter erschlossen wird

$$\frac{y-p}{y-q}=\Delta e^{\frac{2}{ax}}.$$

§16 Wir wollen hier der Kürze wegen $e^{\frac{2}{ax}}=\omega$ setzen, woher erschlossen wird

$$y=\frac{p-\Delta\omega q}{1-\Delta\omega},$$

und, nachdem für p und q die ursprünglichen Werte wieder eingesetzt worden sind, wird man haben

$$y = \frac{1 + ax + (1 - ax)\Delta\omega}{xx(1 - \Delta\omega)}.$$

Und daher wird weiter sein

$$z = \frac{1 + ax + (1 - ax)\Delta\omega}{x(1 - \Delta\omega)} = \frac{1 + \Delta\omega}{x(1 - \Delta\omega)} + a.$$

Weil aber $c = a$ und $n = -2$ ist, wird unser für z gefundener Kettenbruch dieser sein

$$z = a + \cfrac{x^{-2}}{-a + \cfrac{x^{-2}}{-3a + \cfrac{x^{-2}}{-5a + \cfrac{x^{-2}}{-7a + \text{etc.}}}}}$$

§17 Weil nun in diesem Ausdruck, nachdem $x = \infty$ genommen worden ist, $z = a$ wird, muss jene beliebige Konstante Δ in passender Weise bestimmt werden, weswegen, nach Setzen von $x = \infty$, auch werden muss

$$\frac{1 + \Delta\omega}{x(1 - \Delta\omega)} = 0,$$

hier ist aber $\omega = e^{\frac{2}{ax}}$, welcher Wert, nachdem $x = \infty$ genommen worden ist, $= 1$ wird, nach Bemerken wovon $0 = \frac{1+\Delta}{x(1-\Delta)}$ werden muss. Weil aber daher Δ noch nicht bestimmt wird, muss diese Untersuchung genauer durchgeführt werden; nachdem natürlich x sehr groß angenommen worden ist, wird aus dem Kettenbruch, der durch ein einziges Glied fortgesetzt worden ist,

$$z = a - \frac{1}{axx},$$

welchem also dieser Ausdruck gleich werden muss

$$a + \frac{1 + \Delta\omega}{x(1 - \Delta\omega)},$$

und daher muss sein

$$\frac{1 + \Delta\omega}{1 - \Delta\omega} = \frac{-1}{ax},$$

woher erschlossen wird

$$\Delta\omega = \frac{1 + ax}{1 - ax} = \Delta\left(1 + \frac{2}{ax}\right),$$

und so wird sein

$$\Delta = \frac{ax(1 + ax)}{(1 - ax)(2 + ax)}.$$

Nachdem hier $x = \infty$ gesetzt worden ist, geht $\Delta = -1$ hervor, und daher wird sein

$$z = a + \frac{1 - \omega}{x(1 + \omega)},$$

während $\omega = e^{\frac{2}{ax}}$ ist, der Wert welches Ausdruckes auch durch gemeine Reihen hinreichend angenehm ausgedrückt werden können wird. Weil nämlich $\omega = e^{\frac{2}{ax}}$ ist, wird der Bruch $\frac{1-\omega}{1+\omega}$ in dieser Form ausgedrückt werden können:

$$\frac{e^{\frac{-1}{ax}} - e^{\frac{1}{ax}}}{e^{\frac{-1}{ax}} + e^{\frac{1}{ax}}},$$

deren Zähler in diese Reihe entwickelt wird:

$$-2\left(\frac{1}{ax} + \frac{1}{6a^3x^3} + \frac{1}{120a^5x^5} + \text{etc.}\right),$$

der Nenner wird hingegen sein

$$2\left(1 + \frac{1}{2a^2x^2} + \frac{1}{24a^4x^4} + \frac{1}{720a^6x^6} + \text{etc.}\right).$$

Dann ist es offenbar, dass gelten wird

$$z = a - \frac{\left(\frac{1}{ax} + \frac{1}{6a^3x^3} + \frac{1}{120a^5x^5} + \text{etc.}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{2a^2x^2} + \frac{1}{24a^4x^4} + \frac{1}{720a^6x^6} + \text{etc.}\right)}.$$

§18 Weil zusätzlich in den dem ersten folgenden Brüchen die absoluten Teile negativ sind, ist es leicht möglich, sie in positive zu verwandeln. Es werde nämlich $z = a + \frac{x^{-2}}{v}$ gesetzt, dass ist

$$v = -a + \cfrac{x^{-2}}{-3a + \cfrac{x^{-2}}{-5a + \cfrac{x^{-2}}{-7a + \text{etc.}}}}$$

woher wird

$$-v = a + \cfrac{x^{-2}}{3a + \cfrac{x^{-2}}{5a + \cfrac{x^{-2}}{7a + \text{etc.}}}}$$

Daher, weil $z = a - \frac{x^{-2}}{-v}$ ist, werden wir, nachdem anstelle von $-v$ der Wert eingesetzt worden ist, haben

$$z = a - \cfrac{x^{-2}}{a + \cfrac{x^{-2}}{3a + \cfrac{x^{-2}}{5a + \cfrac{x^{-2}}{7a + \text{etc.}}}}}$$

§19 Wir wollen nun wiederum den allgemeinen Kettenbruch betrachten, der für z gefunden worden ist und der war

$$z = c + \cfrac{x^n}{c + na + \cfrac{x^n}{c + 2na + \cfrac{x^n}{c + 3na + \cfrac{x^n}{c + 4na + \text{etc.}}}}}$$

wo die Werte von z aus dieser Differentialgleichung:

$$axdz - czdx + zzdx = x^n dx$$

bestimmt werden. Nun legen im Kettenbruch alle absoluten Teile, welche c, $c + na$, $c + 2na$, $c + 3na$ etc. sind, eine nach der Differenz na wachsende arithmetische Progression fest, aber die Zähler sind alle einander gleich, natürlich x^n. Daher wird also umgekehrt, sooft ein solcher Kettenbruch auftaucht, sein

Wert durch eine sich auf Geschlecht der RICCATI-Gleichung beziehende Differentialgleichung bestimmt werden können, was wir im folgenden Problem genauer weiterverfolgen wollen.

PROBLEM

§20 Nachdem im Allgemeinen dieser Kettenbruch vorgelegt worden ist:

$$z = m + \cfrac{\Delta}{m + n + \cfrac{\Delta}{m + 2n + \cfrac{\Delta}{m + 3n + \cfrac{\Delta}{m + 4n + \text{etc.}}}}}$$

dessen absolute Teile in einer arithmetischen Progression fortschreiten, die Zähler aber alle einander gleich sind, sein Wert z auf die Auflösung der RICCATI-Gleichung zurückzuführen.

LÖSUNG

Wenn diese Form mit der gerade zuvor angeführten verglichen wird, ist es ersichtlich, dass sie in diese umgewandelt wird, wenn wir $a = 1$ und $c = m$ setzen, dann muss aber der Potenz x^n der Wert Δ zugeteilt werden, was sich freilich nur nach durchgeführter Integration machen lässt. Deswegen muss der gesuchte Wert für z aus dieser Differentialgleichung:

$$xdz - mzdx + zzdx = x^n dx$$

deriviert werden:

§21 Um nun diese Gleichung auf die übliche Form der RICCATI-Gleichung zurückzuführen, wollen wir $z = x^m v$ setzen, dass natürlich die Gleichung auf drei Terme reduziert wird:

$$x^{m+1}dv + vvx^{2m}dx = x^n dx,$$

welche, durch x^{m+1} dividiert, in diese übergeht:

$$dv + vvx^{m-1}dx = x^{n-m-1}dx,$$

um welche Form vollkommen auf die RICCATI'sche zurückzuführen, wollen wir $x^m = t$ setzen, dass $x^{m-1}dx = \frac{dt}{m}$ und $x = t^{\frac{1}{m}}$ wird, und daher schließlich

$$dx = \frac{1}{m}t^{\frac{1-m}{m}} \quad \text{und} \quad x^{n-m-1} = t^{\frac{n-m-1}{m}},$$

nach Einsetzen von welchen unsere Gleichung werden wird

$$dv + \frac{vvdt}{m} = \frac{1}{m}t^{\frac{n-2m}{m}}dt, \quad \text{oder} \quad mdv + vvdt = t^{\frac{n-2m}{m}}dt,$$

welches die von RICCATI vorgestellte Gleichung selbst ist.

§22 Wir wollen nun eingehender alle Fälle betrachten, in denen diese Gleichung eine Auflösung zulässt, welches diese sind, wann immer im Term auf der rechten Seite der Exponent $\frac{n-2m}{m}$ in dieser Form enthalten ist $\frac{-4i}{2i+1}$, während i irgendeine ganze Zahle bezeichnet, ob eine positive oder eine negative. Wir wollen also $\frac{n-2m}{m} = -\frac{4i}{2i+1}$ setzen, und indem auf beiden Seiten zwei addiert wird, werden wir $\frac{n}{m} = \frac{2}{2i+1}$ haben, woher zugleich $m = 2i + 1$ und $n = 2$ genommen werden können wird. Daher tritt es klar zu tage, dass nach Nehmen von $n = 2$, sooft m irgendeine ungerade Zahl war, ob positiv oder negativ, der Wert des Kettenbruches tatsächlich angegeben werden kann, was also gelingt, wenn galt

$$z = 2i + 1 + \cfrac{\Delta}{2i + 3 + \cfrac{\Delta}{2i + 5 + \cfrac{\Delta}{2i + 7 + \text{etc.}}}}$$

Dort ist es freilich anzumerken, dass nach Durchführen der Integration $x^n = \Delta$ werden muss, das heißt $xx = \Delta$, während $x^m = z = x^{2i+1}$ ist.

§23 Sooft aber der vorgelegte Kettenbruch nicht in diesen Bedingungen enthalten ist, dann wird er auch durch die bis jetzt bekannten Methoden keineswegs in endlicher Form ausgedrückt werden können, sondern wir müssen zufrieden sein, seinen Wert auf die RICCATI-Gleichung zurückgeführt zu haben, deren Auflösung natürlich durch unendliche Reihen hinreichend angenehm dargeboten werden kann, was wir an einem Beispiel aufzeigen werden.

BEISPIEL

Es sei uns dieser Kettenbruch vorgelegt:

$$z = 1 + \cfrac{\Delta}{2 + \cfrac{\Delta}{3 + \cfrac{\Delta}{4 + \text{etc.}}}}$$

Hier wird also $m = 1$ und $n = 1$ sein, und der Wert von z muss aus dieser Differentialgleichung gesucht werden:

$$xdz - zdx + zzdx = xdx,$$

und nach Auflösen dieser Gleichung wird Δ anstelle von x geschrieben werden müssen, woher es klar zu tage tritt, dass die Integration so durchgeführt werden muss, dass, nachdem $x = 0$ gesetzt worden ist, $z = 1$ wird.

Es werde nun $z = xv$ gesetzt, dass diese Gleichung entspringt:

$$dv + vvdx = \frac{dx}{x},$$

um welche angenehm in eine Reihe aufzulösen, wollen wir $v = \frac{du}{udx}$ setzen, und für konstant angenommenes Element dx wird

$$xddu - udx^2 = 0,$$

welche leicht in eine nach den natürlichen Potenzen von x aufsteigende Reihe aufgelöst werden können wird. Es werde also festgelegt

$$u = ax^{\lambda} + bx^{\lambda+1} + cx^{\lambda+2} + dx^{\lambda+3} + \text{etc.}$$

und es wird sein

$$\frac{ddu}{dx^2} = a\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + b(\lambda+1)\lambda x^{\lambda-1} + c(\lambda+2)(\lambda+1)x^{\lambda} + d(\lambda+3)(\lambda+2)x^{\lambda+1} + \text{etc.},$$

welche Reihe $\frac{u}{x}$ selbst gleich sein muss, das heißt

$$ax^{\lambda-1} + bx^{\lambda} + cx^{\lambda+1} + dx^{\lambda+2} + ex^{\lambda+3} + \text{etc.}$$

Daher tritt es klar zu tage, dass der erste Term, $a\lambda(\lambda - 1)$, der Reihe zu Null gemacht werden muss, was auf zwei Weisen geschehen kann, indem entweder $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ genommen wird.

§25 Es werde also zuerst $\lambda = 0$ genommen und unsere gleichzumachenden Reihen werden diese sein:

$$\text{I.} \quad 2c + 6dx + 12ex^2 + 20fx^3 + \text{etc.}$$

und

$$\text{II.} \quad ax^{-1} + b + cx + dxx + ex^3 + \text{etc.};$$

es wird also sein:

$$\begin{aligned} &a = 0, \quad c = \frac{b}{1 \cdot 2}, \quad d = \frac{c}{2 \cdot 3} = \frac{b}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}, \\ &e = \frac{d}{3 \cdot 4} = \frac{b}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4}, \quad f = \frac{e}{4 \cdot 5} = \frac{b}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5}, \end{aligned}$$

weswegen unsere Reihe für u nach Nehmen von $b = 1$ sein wird

$$u = x + \frac{1}{1 \cdot 2}xx + \frac{1}{1 \cdot 2^2 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4}x^4 + \frac{1}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5}x^5 + \text{etc.}$$

§26 Auf die gleiche Weise wollen wir den Fall $\lambda = 1$ entwickeln, und die für $\frac{ddu}{dx^2}$ gefundene Reihe wird sein

$$1 \cdot 2b + 2 \cdot 3cx + 3 \cdot 4dx^2 + 4 \cdot 5ex^3 + 5 \cdot 6fx^4 + \text{etc.},$$

welcher dann diese gleich sein muss

$$\frac{u}{x} = a + bx + cxx + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \text{etc.},$$

woher wird

$$\begin{aligned}
&a = 2b, \quad b = \frac{1}{1 \cdot 2}a, \quad c = \frac{b}{2 \cdot 3} = \frac{a}{1 \cdot 2^2 \cdot 3}, \\
&d = \frac{c}{3 \cdot 4} = \frac{a}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4}, \quad e = \frac{d}{4 \cdot 5} = \frac{a}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5} \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Daher werden also nach Nehmen von $a = 1$ für u diese Reihe:

$$u = x + \frac{1}{1 \cdot 2}xx + \frac{1}{1 \cdot 2^2 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4}x^4 + \frac{1}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5}x^5 + \text{etc.}$$

welche mit der vorhergehenden vollkommen übereinstimmt.

§27 Nachdem nun der Wert des Buchstaben u gefunden worden ist, wird wegen $v = \frac{du}{udx}$ sein

$$v = \frac{1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2^2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \text{etc.}}{x + \frac{xx}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2^2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5} + \text{etc.}}$$

Deshalb wird der Wert des vorgelegten Kettenbruches sein

$$z = \frac{1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2^2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \text{etc.}}{1 + \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{1 \cdot 2^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} + \frac{x^4}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5} + \text{etc.}}$$

wo es in angenehmer Weise passiert, dass, nachdem $x =$ genommen worden ist, $z = 1$ wird. Deswegen, wenn wir $x = \Delta$ setzen, wird der Wert des vorgelegten Kettenbruches sein

$$z = \frac{1+\Delta+\frac{\Delta^2}{1\cdot 2^2}+\frac{\Delta^3}{1\cdot 2^2\cdot 3^2}+\frac{\Delta^4}{1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}+\text{etc.}}{1+\frac{\Delta}{1\cdot 2}+\frac{\Delta^2}{1\cdot 2^2\cdot 3}+\frac{\Delta^3}{1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4}+\frac{\Delta^4}{1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5}+\text{etc.}}$$

KOROLLAR

§28 Wir wollen $\Delta = 1$ nehmen, so dass dieser Kettenbruch vorgelegt wird:

$$z = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\text{etc.}}}}}$$

und der Wert von z wird auch auf die folgende Weise ausgedrückt werden:

$$z = \frac{2+\frac{1}{1\cdot 2^2}+\frac{1}{1\cdot 2^2\cdot 3^2}+\frac{1}{1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}+\frac{1}{1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5^2}+\text{etc.}}{1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2^2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5}+\text{etc.}}$$

dessen Wert in Dezimalbrüchen ziemlich bequem ausgedrückt werden können wird. Der Zähler wird aber $= 2,279584$ und der Nenner $= 1,590635$ aufgefunden, woher weiter der Wert von $z = 1,432490$ erschlossen wird.

§29 Dieser Wert kann aber auch aus dem Kettenbruch selbst abgeleitet werden. Weil nämlich alle Zähler $= 1$ sind, werden die absoluten Teile als Indizes der Reihe nach aufgeschrieben und auf gewohnte Weise die Brüche darunter geschrieben wie folgt:

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 & \text{etc.} \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{10}{7}, & \frac{43}{30}, & \frac{225}{157}, & \frac{1393}{972} & \text{etc.} \end{array}$$

welche Werte umso näher an die Wahrheit herankommen, umso weiter sie fortgesetzt werden.